Задания по ТФКП для выпускного экзамена.

1. **Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их свойства. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.**

**Найти все значения корня n-й степени из комплексного числа.**

Выполнить действия:

1.

2.

3.

Решить уравнения

4.

5.

6.

***Ответы:***

**1.**

при

при

при

при

при

**2.**

при

при

**3.**

при

при

при

при

**4.**

при

при

при

при

**5.** при

**6.**

при

при

при

при

при

**Пример 1.** ***Найти все значения корня***

**Решение.**

n значений корня n-й степени из комплексного числа получим из формулы:

(2)

где ;

.

Рассмотрим число . Найдем модуль и главное значение аргумента этого числа.

,

.

По условию . Подставляя все найденные значения в формулу (2) получим:

При

При

**Пример 2.** *Решить уравнение*

**Решение**.

Найдем все значения корня 4 степени из числа . Для этого найдем модуль и главное значение аргумента:

1. **Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции и их свойства. Формулы Эйлера.**

**Выделить действительную и мнимую части заданной функции.**

Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного:

1. .

2. .

3. .

4.

5.

6.

7.

***Ответы:***

1.

2..

3..

4..

5..

6.

7.

Записать в алгебраической форме (выделить действительную и мнимую части)

1.

2.

3.

***Ответы:***

1.*i*

2.

3.

**Пример 1.** Выделить действительную и мнимую части функции комплексного переменного .

**Решение.**

Пусть . Тогда функция примет вид

*.*

Используем известную формулу тригонометрии

*.*

*.*

Далее воспользуемся формулами, связывающими тригонометрические и гиперболические функции комплексного аргумента

Получим следующее

Таким образом, для функции действительная часть , мнимая часть .

**Ответ.**  .

**Пример 2.** Записать в алгебраической форме (выделить действительную и мнимую части)

**Решение.**

Воспользуемся формулой Эйлера

Получим

1. **Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции   
   . Многозначность функции .**

**Вычислить значение заданной функции.**

Вычислить:

1. а) . *Ответ:* а)

б) б)

2. а) *Ответ:* а)

б) б)

3. а) *Ответ:* а)

б) б)

4. а) . *Ответ:* а)

б) б)

5. а) . *Ответ:* а)

б) б)

**Пример.** Вычислить указанные значения.

а) ; б)

**Решение.**

а) Воспользуемся следующей формулой

Т.к. ,

то

и

Таким образом

б) Полагая в формуле

, , получим

.

**Ответ.** а)

б) .

1. **Производная функции комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.**

**Выяснить, является ли заданная функция аналитической на всей плоскости комплексного переменного.**

Выяснить, являются ли аналитическими на всей комплексной плоскости функции:

1. . Ответ: не является.

2. . Ответ: является.

3. . Ответ: не является.

4. Ответ: является

Восстановить аналитическую функцию по ее действительной или мнимой части

|  |
| --- |
| 1. |
| 2. |
| 3., |
| 4.  Ответы:  4.  5.  6.  7. |

**Пример 1.** Показать, что функция является аналитической во всей комплексной плоскости

**Решение.**

Имеем . Таким образом

Функции как функции действительных переменных дифференцируемы в точке и удовлетворяют условиям Коши-Римана:

Следовательно, функция является аналитической во всей комплексной плоскости.

**Пример 2.** Восстановить аналитическую функцию по ее действительной части , удовлетворяющую условию .

**Решение.**

Так как искомая функция по условию задачи является аналитической, то для нее справедливы условия Коши-Римана

Так как , то

Согласно условию (1) получим, что

Проинтегрировав последнее равенство по переменной *y*, найдем функцию :

где функция пока неизвестна. Продифференцируем теперь последнее равенство по переменной *x*:

Из условия задачи найдем теперь :

.

Согласно условию (2) получим следующее равенство:

, где .

Следовательно, мнимая часть искомой функции имеет вид

А значит сама функция запишется в виде следующим образом:

Или

Выражение в скобках согласно формуле Эйлера равно . А значит

. (3)

Для того, чтобы найти значение постоянной С используем условие

.

Подставляем полученное значение *Ci* в формулу (3). Итак, искомая функция имеет вид

**Ответ.** .

1. **Теорема Коши. Интегральная формула Коши для односвязной и многосвязной области.**

**Вычислить заданный интеграл с помощью интегральной формулы Коши**

*Ответ:*

4.

5.

6. 0

7.

**Пример.** Вычислить интеграл с помощью интегральной формулы Коши.

**Решение.**

Если функция является аналитической в области *D*, ограниченной кусочно-гладким замкнутым контуром *L*, и на самом контуре, то имеет место интегральная формула Коши

Внутри окружности знаменатель функции равен нулю в двух точках . Внутри окружности лежит только точка Поэтому можно непосредственно применить интегральную формулу Коши.

Функция является аналитической в данной области, поэтому, согласно формуле Коши имеем

Ответ:

1. **Ряд Лорана. Теорема Лорана.**

**Разложить заданную функцию в ряд Лорана в кольце.**

***Ответы:***

5. не разлагается

**Пример** Разложить функцию ряд Лорана в кольце.

**Решение.**

Особыми точками функции являются .

Представим функцию в виде суммы элементарных дробей

Внутри окружности ряд для функции будет сходящимся для .

Поэтому

Вне окружности ряд для функции будет сходящимся для .

Поэтому

Таким образом, получим

Экзаменационные задания

1. ***Тригонометрическая форма комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа и их свойства. Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.***

Решить уравнение .

1. ***Понятие функции комплексного переменного. Элементарные функции и их свойства. Формулы Эйлера.***

Выделить действительную и мнимую части функции . ***ртииирт***.

1. ***Производная функции комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции.***

Восстановить аналитическую функцию по ее мнимой части , .

**или**

Выяснить, является ли функция аналитической на всей плоскости

1. ***Теорема Коши. Интегральная формула Коши для односвязной и многосвязной области.***

Вычислить

интеграл с помощью интегральной формулы Коши

1. ***Ряд Лорана. Теорема Лорана.***

Разложить функцию в ряд Лорана